SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

OPERATORI IPERBOLICI A CARATTERISTICHE DOPPIE

14 MARZO 1985

1. INTRODUZIONE

In questo seminario ci occuperemo di equazioni lineari iperboliche a caratteristiche di molteplicità ≤ 2 e non costante, con riferimento a due ordini di problemi:

1) Problema di Cauchy ben posto (caso C^{∞}, Gevrey, analitico).
2) Analisi delle singolarità (C^{∞}, Gevrey, analitiche) delle soluzioni.

Tutti i risultati che esporremo sono noti, sicché il nostro intento è esclusivamente didattico.

E' noto che i due problemi su indicati sono strettamente correlati, ma va tenuto presente che il problema 2) ha un interesse indipendente da 1).

I problemi 1) e 2) hanno ormai trovato una sistemazione definitiva nel caso delle equazioni strettamente iperboliche. Il caso degli operatori iperbolici a caratteristiche di molteplicità costante (anche > 2) è stato pure ampiamente studiato (Cfr. Chazarain [1] per il caso C^{∞}, Kashiwara-Kawai [6], Trepreau [23], Laubin [14] per il caso analitico-Gevrey e, per quanto riguarda 2), il recente lavoro di Taniguchi [21] nel caso Gevrey).

Per operatori a caratteristiche di molteplicità variabile il quadro dei risultati e invece assai più incompleto (specialmente per il problema 2)), benché la letteratura sull'argomento sia ormai molto vasta.

Qui ci limitiamo a considerare il caso di caratteristiche al più doppie e per quanto attiene a 2), tratteremo il caso più semplice: quello delle *caratteristiche doppie involutive*.

Per quanto riguarda il Problema di Cauchy (P. di C.) ben posto, tra i lavori fondamentali citiamo i seguenti:

i) <u>Nel caso C^∞</u>. (Il P.d.C. è in generale non ben posto):

- Ivrii-Petkov [11]: condizioni necessarie
- Hormander [4]: precisazione di [11] e condizioni sufficienti (si veda anche Ivrii [10] e Oleinik [20]).

ii) <u>Nel caso analitico e Gevrey</u>

- Ivrii [9]: condizioni necessarie (in Gevrey d'ordine > 1 e per molteplicità ≧ 2)
- Trepreau [23](e bibliografia), Bronshtein [25], Kashiwara-Kawai [6]; condizioni sufficienti.

Circa il problema 2), ricordiamo:

i) <u>Nel caso C^∞</u> (mancano risultati altrettanto generali che per 1)):

- Melrose [16]: caso effettivamente iperbolico (si confronti anche Alinhac [1]', Ivrii [8]: caratteristiche doppie regolari (i.e.radici C^∞) di tipo simplettico).
  - Melrose-Uhlmann [17], R. Lascar [12], Nosmas [19]: caratteristiche doppie regolari di tipo involutivo.
  - R. Lascar [12], Melrose-Uhlmann [18]: caratteristiche doppie di tipo involutivo
  - B. Lascar-R. Lascar [13], Ivrii [8], Alinhac [2]': caratteristiche doppie di tipo non involutivo.

ii) <u>Nel caso analitico-Gevrey</u>

- Il lavoro fondamentale di Kashiwara-Kawai [6] (Cfr. Laubin [14] per il caso di caratteristiche doppie di tipo involutivo).
- Miwa [6]': caratteristiche doppie regolari (i.e. radici analitiche) di tipo simplettico.
- Wakabayashi [24]: sul WF(·) Gevrey per operatori iperbolici qualunque.

2. OPERATORI IPERBOLICI

Poiché ci limiteremo a considerare caratteristiche di molteplicità ≤ 2, non sarà troppo restrittivo limitarsi a trattare operatori differenziali del 2° ordine:

$$(2.1) \qquad P = D_t^2 + 2\, B(t,y,D_y)D_t - A(t,y,D_y),$$

su un cilindro aperto $X =]-T, T[\times Y \subset R_t \times R_y^n$, intorno dell'origine. Indicheremo con (x,ξ), $x = (t,y)$, $\xi = (\tau,\eta)$ i punti di T^*X e con (y,η) i punti di T^*Y.

In (2.1) B (risp. A) è un operatore differenziale del 1° ordine (risp. 2° ordine) in coefficienti almeno C^∞ in X.

D'ora innanzi supporremo sempre soddisfatta l'ipotesi seguente:

H_1 - Detti $b(t,y,\eta)$ e $a(t,y,\eta)$ i simboli principali di B ed A rispettivamente, per ogni $(t,y,\eta) \in X \times R^n \setminus o$, l'equazione in τ:

$$(2.2) \qquad p(t,x,\tau,\eta) = \tau^2 + 2b(t,y,\eta)\tau - a(t,y,\eta) = 0$$

ha radici reali.

H_1 equivale a dire che b ed a sono reali e che $b(t,y,\eta)^2 + a(t,y,\eta) \geq 0$, $|t| < T$, $(y,\eta) \in T^*Y \setminus o$.

Il teorema di Lax-Mizohata (Cfr. Hörmander [4]) ci dice che la ipotesi H_1 è necessaria (almeno per $t = 0$) se si vuole che il Problema di Cauchy (omogeneo):

$$(2.3)\ \text{P.d.C.}\quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{in } X \\ u_{|t=o} = g_o & \\ D_t u_{|t=o} = g_1 & \text{in } Y \end{cases}$$

sia ben posto per i dati g_o, $g_1 \in C_o^\infty(Y)$.

E' noto che senza minore generalità, ci si può limitare a considerare il caso $B = 0$. Infatti:

$$P = (D_t + B)^2 - B^2 - A - [D_t, B] =$$

$$= (D_t + B)^2 - C(t,y,D_y),$$

con C del 2° ordine.

Se $B(t,y,D_y) = b(t,y,D_y) + \beta(t,y)$, esiste un diffeomorfismo χ di un intorno cilindrico di $t = 0$, $z = 0$ in $R_t \times R_z^n$ su un intorno di $(0,0)$ in X per cui nelle variabili (t,z) $D_t + b(t,y,D_y)$ diviene D_t, sicché P si trasforma nell'operatore:

$$(2.3)' \quad \tilde{P} = (D_t + \tilde{\beta}(t,z))^2 - \tilde{C}(t,z,D_z),$$

con $\tilde{\beta}(t,z) = \beta(\chi(t,z))$ e $\tilde{C}$ è del 2° ordine. Si noti che $\tilde{P}$ soddisfa H_1:

Infine la trasformazione:

$$(2.3)'' \quad v(t,z) \longrightarrow v(t,z)\, e^{\int_o^t \tilde{\beta}(s,z)ds}$$

muta le soluzioni del P.d C. per $\tilde{P}$ nelle soluzioni del P.d C. per un operatore del tipo $D_t^2 - \tilde{\tilde{C}}(t,z,D_z)$, con $\tilde{\tilde{C}}$ del 2° ordine, soddisfacente H_1.

D'ora innanzi supporremo quindi P nella forma (2.1) con B = 0. La situazione più semplice si ha quando le radici di (2.2) sono distinte, che è il *caso strettamente iperbolico*. In tal caso il P.d C. è ben posto in C^∞. Inoltre si ha la seguente descrizione delle singolarità.

Si ponga

$$(2.4) \qquad \Sigma = \{(t,y,\tau,\eta) \in T^*X \mid \eta \neq 0,\ p(t,y,\tau,\eta) = 0\}$$

(nel caso iperbolico stretto Σ è l'unione disgiunta dei due coni $\tau = \pm\sqrt{a(t,y,\eta)}$). Sia poi $H_p = p'_\tau \partial_t + \langle\nabla_\eta p, \partial_x\rangle - p'_t \partial_\tau - \langle\nabla_y p, \partial_\eta\rangle$ il campo hamiltoniano di p (attualmente $H_p \neq 0$ su $T^*X\setminus o$).

Con $R \ni s \to \exp(s H_p)(\rho)$ indichiamo la curva integrale di H_p di punto iniziale $\rho \in T^*X\setminus o$. Infine poniamo

$$(2.5) \qquad i^*: T^*X_{|Y} \longrightarrow T^*Y$$
$$(o,y,\tau,\eta) \longmapsto (y,\eta)$$

Restano allora definite le relazioni seguenti:

$$(2.6) \quad \begin{cases} C^\pm = \{(\rho',\rho'') \in T^*X\setminus o \times T^*Y\setminus o \mid \exists\ \rho \in \Sigma,\ i^*(\rho) = \rho'', \\ \qquad \exists s,\ \pm s > o,\ \rho' = \exp(sH_p)(\rho)\} \\ C = C^+ \cup C^- \end{cases}$$

Allora, *nel caso strettamente iperbolico, se* $u \in \mathcal{D}'(X)$ *risolve* (2.3) *con* $g_0, g_1 \in \mathcal{E}'(Y)$ *si ha:*

$$(2.7) \qquad WF(u) \subset C \circ (WF(g_0) \cup WF(g_1)),$$

dove $WF(\cdot)$ è qui il wave front set C^∞, analitico o Gevrey (Cfr. Hörmander [5] per le definizioni); per il caso del fronte d'onda analitico o Gevrey supponiamo i coefficienti di P analitici in X (anche se questa è un'ipotesi un po' sovrabbondante).

La situazione cambia radicalmente se P non è strettamente iperbolico, cioè se $a(t,y,\eta) = 0$ per qualche t,y,η, $\eta \neq 0$.

Mettiamoci dunque nella situazione in cui l'insieme:

$$(2.8) \qquad \Sigma' = \{t,y,\tau,\eta) \in T^*X \mid \eta \neq 0,\ dp(t,y,\tau,\eta) = 0\}$$

è non vuoto. Si noti che $\Sigma' \subset \Sigma$ (relazione d'Eulero). Inoltre, poiché ci interessa il P.d.C. (2.3) supporremo sempre che sia $i^*(\Sigma') \neq \emptyset$.

E' noto che se Σ' è non vuoto il P.d.C. (2.3) non è in generale ben posto in C^∞. Precisamente, com'è stato provato da Ivrii-Petkov [11] e da Hörmander [4], i termini del 1° ordine in P giocano un ruolo determinante. Per poter enunciare il Teorema di Ivrii-Petkov ricordiamo alcune nozioni.

Detto p_1 il termine omogeneo di grado 1 nel simbolo di P, poniamo:

$$(2.9) \qquad p'(x,\xi) = p_1(x,\xi) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{1}^{n+1}{}_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j\, \partial \xi_j}(x,\xi)$$

Il simbolo p' si chiama *simbolo sottoprincipale* di P. E' possibile vede-

re che la restrizione $p'|_{\Sigma'}$ è invariante per trasformazioni canoniche omogenee (Cfr. Duistermaat [2]).

Per ogni $\rho \in \Sigma'$ si ponga

$$(2.10) \qquad \text{Hess } p(\rho) = \begin{pmatrix} d^2_{xx}\, p(\rho) & d^2_{\xi x} p(\rho) \\ d^2_{x\xi}\, p(\rho) & d^2_{\xi\xi} p(\rho) \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana di p in ρ.

Accanto a questa consideriamo la *matrice fondamentale* definita da:

$$(2.11) \qquad F(\rho) = \begin{pmatrix} d^2_{x\xi}\, p(\rho) & d^2_{\xi\xi}\, p(\rho) \\ -d^2_{xx} p(\rho) & -d^2_{\xi x} p(\rho) \end{pmatrix}$$

L'interpretazione di $F(\rho)$ è la seguente. La matrice Hess $p(\rho)$ definisce una forma bilineare su $T_\rho(T^*X)$; indicata con

$$(2.12) \qquad \omega = \sum_{1}^{n+1} {}_j \; d\xi_j \wedge dx_j$$

la 2-*forma simplettica* su $T(T^*X)$, si ha

$$(2.12)' \qquad \omega_\rho \left(\binom{\delta x}{\delta\xi}, \binom{\delta x'}{\delta\xi'} \right) = \langle \delta\xi, \delta x' \rangle - \langle \delta\xi', \delta x \rangle,$$

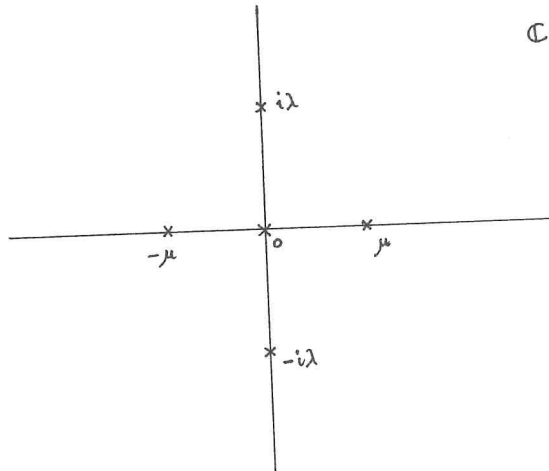
per ogni $\binom{\delta x}{\delta\xi}, \binom{\delta x'}{\delta\xi'} \in T_\rho(T^*X)$.

E' facile riconoscere che si ha:

(2.13) $\langle \text{Hess } p(\rho)\, v, v' \rangle = \omega_\rho(v, F(\rho)v'), \; \forall v, v' \in T_\rho(T^*X)$

La simmetria di Hess $p(\rho)$ fa si che si abbia:

(2.13)' $\omega_\rho(v, F(\rho)v') + \omega_\rho(F(\rho)\, v, v') = 0 \quad \forall v, v'$(+).

Giacché $F(\rho)$ è antisimmetrica rispetto ad ω_ρ, si può vedere (Cfr. Duistermaat [2]) che lo spettro di $F(\rho)$ è contenuto in $\{\lambda \in C | \mathrm{Re}\, \lambda = 0\}$ fatta al più eccezione per 2 autovalori reali μ, $-\mu$ di molteplicità geometrica 1; di più gli autovalori immaginari e non nulli di $F(\rho)$ sono semplici, mentre 0 è un autovalore di molteplicità pari.

Si dice che P è *effettivamente iperbolico* in $\rho \in \Sigma'$ se $F(\rho)$ possiede autovalori reali $\neq 0$.

(+) Poiché p è reale è facile vedere che $F(\rho) = \frac{d}{dt} [d_\rho \, \phi_t]_{t=0}$, dove ϕ_t: $T^*X\setminus o \to T^*X\setminus o$ è il gruppo locale $\phi_t(\rho) = \exp(tH_p)(\rho)$.

Esempi

1) $P = D_t^2 - t^2\, |D_y|^2 + \ldots$;

è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t = 0, y, \tau = 0, \eta)$ di (con $\mu = \pm 2|\eta|$)

2) $P = D_t^2 - \sum_{j=1}^{k} D_{y_j}^2 + \ldots,\ k < n;$

non è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t, y;\ \tau = 0, \eta' = 0,\ \eta'' \neq o)$ di Σ' ($F(\rho)$ è nilpotente).

3) $P = D_t^2 - D_{y_1}^2 - y_1^2 \sum_{2}^{n}{}_j\ D_{y_j}^2 + \ldots$

non è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t, y_1 = 0, y';$ $\tau = 0, \eta_1 = 0, \eta')$ di Σ' ($F(\rho)$ ha autovalori 0 e $\pm\, 2i\, |\eta'|$).

Definiamo

$$\text{(2.14)} \qquad Tr^{+}\, F(\rho) = \sum_{\substack{\lambda \in sp\, F(\rho) \\ Im\, \lambda \geq o}} Im\, \lambda$$

Possiamo allora enunciare il teorema seguente.

Teorema 1 (Ivrii-Petkov [11], Hörmander [4]).

Se $\Sigma' \neq \emptyset$ e se il P.d C. (2.3) è ben posto in C^∞ allora per ogni $\rho \in \Sigma'$ deve aversi:

1) P è effettivamente iperbolico in ρ

ovvero:

2) $-\frac{1}{2}\, Tr^{+}\, F(\rho) \leq p'(\rho) \leq \frac{1}{2}\, Tr^{+}\, F(\rho).$

Si osservi che se $F(\rho)$ è nilpotente la condizione 2) diviene $p'(\rho) = 0$, *condizione di Levi*.

Per la (lunga) dimostrazione si rimanda a [4].

Quanto alle condizioni sufficienti perché il P.d.C. sia ben posto in C^∞ occorre distinguere tra il caso effettivamente iperbolico ed il caso non effettivamente iperbolico.

Storicamente, il caso effettivamente iperbolico è stato il primo ad essere trattato diffusamente a cominciare dal lavoro fondamentale di Oleinik [20]. Una sistemazione pressoché definitiva si è però avuta solo recentemente con Melrose [16] (cfr. anche Ivrii [10]). In [16] viene provato "essenzialmente" che se P è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho \in \Sigma'$ allora il P.d.C. è ben posto in C^∞. Viene anche dato un teorema di propagazione per il $WF(\cdot)$-C^∞ che ora enunceremo. Premettiamo la definizione di *raggio* (o *bicaratteristica spezzata*). Diremo che $\gamma: I \subset R \to \Sigma$ continua, con $I = [\alpha,\beta]$, è un raggio se esiste una partizione finita $s_0 = \alpha < s_1 < \dots < s_{\nu-1} < s_\nu = \beta$ di I per cui:

$$(2.15)\quad \begin{cases} \gamma(s_j) \in \Sigma' \quad , j = 1,\dots, \nu-1 \\ t \circ \gamma \text{ è monotona vicino a } s_0, s_1,\dots,s_\nu \\ \gamma|_{(s_{j-1},s_j)} \text{ è una bicaratteristica nulla di P contanuta in } \Sigma\setminus\Sigma' \quad j = 1,\dots,\nu \end{cases}$$

Si ha allora il risultato seguente:

<u>Teorema 2</u> (Melrose [16]). Se P è effettivamente iperbolico in ogni punto di Σ' e se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del P.d.C. (2.3), allora:

(2.16) $WF(u) \subset \{\rho\ \Sigma \mid \exists \rho' \in (i^*)^{-1}(WF(g_0) \cup WF(g_1)), \exists$ un raggio $\gamma: [\alpha,\beta] \to \Sigma,\ \gamma(\alpha) = \rho',\ \gamma(\beta) = \rho\}$.

Il $WF(\cdot)$ è qui il fronte d'onda C^∞.

Un esempio geometricamente interessante si ha quando Σ' è una sottàvarietà (C^∞) di $T^*X\setminus o$ di codimensione $k+1$, con $k = 2h + 1$, di tipo simplettico, i.e. la restrizione della 2-forma ω_ρ a $T_\rho(\Sigma')$ è non degenere $\forall \rho \in \Sigma'$ (alternativamente $T_\rho(\Sigma') \cap T_\rho(\Sigma')^\perp = (o)$, essendo $\perp$ l'ortogonale per ω_ρ) e lo spettro di $F(\rho)$ è fatto da $\lambda = 0, \lambda = \pm\mu,\ \mu > 0$.

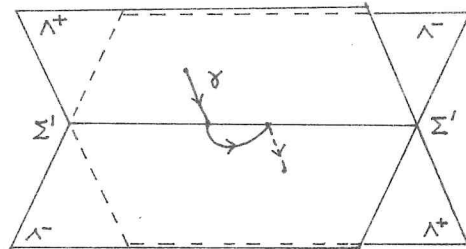
E' allora possibile trovare due sottovarietà $\Lambda^+, \Lambda^- \subset \Sigma$ tali che $\Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Sigma'$ con intersezione trasversale (i.e. codim Λ^+ = codim $\Lambda^- = 2h+1$ e $T_\rho(\Sigma') = T_\rho(\Lambda^+) \cap T_\rho(\Lambda^-)$, $\forall \rho \in \Sigma'$)(+).

Ad es., sia $P = D_t^2 - (t^2+|y'|^2)|D_{y''}|^2+|D_{y'}|^2$, $y = (y',y'') \in R^h \times R^{n-h}$; si ha:

$$\begin{cases} \Lambda^\pm = \{t,y,\tau,\eta) \mid y' = 0,\ \eta' = 0,\ \tau = \pm t|\eta''|,\ \eta'' \neq o\} \\ \Sigma' = \Lambda^+ \cap \Lambda^- \\ \Sigma = \{(t,y,\tau,\eta) \mid \tau = \pm\sqrt{(t^2+|y'|^2)|\eta'|^2+|\eta''|^2}\} \end{cases}$$

E' facile vedere che le bicaratteristiche nulle di P che intersecano Λ^+ o Λ^- sono contenute in Λ^+(risp. Λ^-) ed hanno un punto limite in Σ', mentre le bicaratteristiche nulle contenute in $\Sigma \setminus (\Lambda^+ \cup \Lambda^-)$ non hanno punti limite in Σ'.

(+) Cfr. R. Abrahm-J. Marsden: Foundation of mechanics. Benjamin, 1978.

Il Teorema 2 applicato in questo caso dice in sostanza che il $WF(u)$ si propaga o su bicaratteristiche contenute in $\Sigma \setminus (\Lambda^+ \cup \Lambda^-)$ o su bicaratteristiche contenute in $\Lambda^+ \cup \Lambda^-$ con biforcazioni possibili lungo Σ'.

Nel caso particolare in cui $h = 0$ sono noti risultati, dipendenti da $p'_{|\Sigma'}$, di esistenza o non esistenza di biforcazioni lungo Σ' (Cfr. Ivrii [8] e Alinhac [1]'). Risultati per $h > 1$, in C^∞, non ci sono noti.

Per alcune indicazioni su esempi fisici riconducibili ai modelli ora esaminati rinviamo a Taylor [22].

Per operatori modellati su $D_t^2 - t^2|D_x|^2 + \ldots$ è stato ampiamente studiato il fenomeno di biforcazione o non biforcazione delle singolarità sulla varietà doppia $\Sigma' = \{t = \tau = 0\}$ (Cfr. Alinhac [1]'); questo fenomeno è legato al comportamento di $p'_{|\Sigma'}$. Non ci risulta che una analisi simile sia stata fatta per operatori effettivamente iperbolici qualunque.

Veniamo ora al caso non effettivamente iperbolico.

Qui i risultati più generali ci sembrano essere quelli di Hörmander [4]. Hörmander lavora sotto alcune ipotesi di regolarità per e di "stabilità" per lo spettro di $F(\rho)$.

H_2) L'insieme $\Sigma' \subset \Sigma \subset T^*X\setminus o$ è una sottovarietà (C^∞) di codimensione $k+1$, $k\geq 1$, di $T^*X\setminus o$ e, per ogni $\rho \in \Sigma'$, il rango della matrice hessiana Hess $p(\rho)$ è uguale a $k+1$.

L'ipotesi H_2 ha il seguente significato. Se $p(t,y,\tau,\eta)= = \tau^2-a(t,y,\eta)$, allora Σ' è definita da $\tau = 0$ e $a(t,y,\eta) = 0$ (perché $a \geq 0$ e quindi $da = 0$ equivale ad $a = 0$). Dunque $a = 0$ definisce una sottovarietà $\hat{\Sigma}$ di $T^*X\setminus o$ di codimensione k. Ora per ogni $\hat{\rho} \in \hat{\Sigma}$ indichiamo con $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma}) = T_{\hat{\rho}}(R_t \times T^*Y)/T_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$ lo spazio normale a $\hat{\Sigma}$ in $\hat{\rho}$ e con π la proiezione naturale su $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$; la matrice Hess $a(\hat{\rho})$ induce una forma quadratica su $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$:

$$\langle \text{Hess } a(\hat{\rho})\, \pi(v), \pi(v)\rangle = \langle \text{Hess } a(\hat{\rho})v, v\rangle \tag{2.17}$$

Dire che Hess $p(\rho)$, $\rho = (\hat{\rho},\tau = 0)$, ha rango $k+1$ equivale a dire che la forma (2.17) è non degenere, sicché, in conclusione, per ogni aperto conico $U \subset\subset\ ]-T,T[\times T^*Y\setminus o$, esiste $C_U > o$ per cui si ha:

$$C_U^{-1}|\eta|^2 d_{\hat{\Sigma}}(t,y,\eta/|\eta|)^2 \leq a(t,y,\eta) \leq C_U\, |\eta|^2\, d_{\hat{\Sigma}}(t,y,\eta/|\eta|)^2, \tag{2.18}$$

per ogni $(t,y,\eta) \in U$, essendo $d_{\hat{\Sigma}}$ la distanza da $\hat{\Sigma}$.

La (2.18) esprime che a è *trasversalmente ellittico* rispetto a $\hat{\Sigma}$. L'altra ipotesi cui accennavamo è la "stabilità" dello spettro di $F(\rho)$, per ρ in Σ' (o meglio in ogni componente di Σ'). Non preciseremo qui il significato esatto di stabilità dello spettro di $F(\rho)$, rinviando a [4], pag. 186, per la definizione precisa; osserviamo solo che tale ipotesi implica, in particolare, che il rango di $\omega_{|T\Sigma'}$ è costante (ricordiamo che per ogni $\rho \in \Sigma'$, il rango di $\omega_{\rho|T_\rho\Sigma'}$ è uguale a $\dim T_\rho\Sigma' - \dim(T_\rho\Sigma' \cap (T_\rho\Sigma')^\perp)$, dove $\perp$ indica l'ortogonale per ω_ρ.

Possiamo ora enunciare il teorema seguente.

Teorema 3 (Hormander [4]). Supponiamo che Σ' soddisfi H_2, che lo spettro di $F(\rho)$ sia stabile, che P non sia effettivamente iperbolico in Σ' e che esista un $\varepsilon > 0$ tale che:

$$-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)T_r^+ F(\rho) \leqq p'(\rho) \leqq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\ Tr^+F(\rho) \quad , \quad \forall \rho \in \Sigma'.$$

Allora il P.d.C. (2.3) è ben posto in C^∞.

Per la dimostrazione rinviamo a [4] e osserviamo che gli esempi 2. e 3. di pag. 11 soddisfano le ipotesi del Teorema 3 (se i termini d'ordine inferiore sono scelti convenientemente).

Per risultati in quest'ordine di idee si veda anche Ivrii [10].

Se si passa a esaminare quali sono i risultati per quanto attiene al problema 2), ci si accorge che non disponiamo di teoremi di propagazione in C^∞ che valgano per tutti gli operatori trattati dal Teorema 3.

Ricordiamo qui i contributi importanti di Ivrii [7,8]; R. Lascar [12], B. e R. Lascar [13], Alinhac [1]', [2]'.

Ci pare che l'unica situazione in cui si possieda una descrizione esauriente delle singolarità C^∞ è quando Σ' è *involutiva regolare*.

Ricordiamo che ciò significa due cose:

1. $\forall \rho \in \Sigma' \quad , \quad T_\rho(\Sigma')^\perp \subset T_\rho \Sigma'$.

2. Il campo radiale $\theta = \langle \xi, \partial_\xi \rangle \notin T_\rho(\Sigma')^\perp$, $\forall \rho \in \Sigma'$.

Una maniera equivalente di esprimere le condizioni su indicate è la seguente: se $q_0(x,\xi) = q_1(x,\xi) = \ldots = q_k(x,\xi) = 0$ sono equazio-

ni locali indipendenti per Σ' (con le q_j positivamente omogenee di grado 1 in ξ, $0 \leq j \leq k$), allora 1) e 2) equivalgono a:

1.' $\{q_i, q_j\}(\rho) = 0$, $\forall \rho \in \Sigma'$, $\forall i,j$.

2.' $H_{q_0}(\rho), \dots, H_{q_k}(\rho), \sum_1^{n+1} \xi_j \partial_{\xi_j}$ sono indipendenti $\forall \rho \in \Sigma'$.

Si noti che $T_\rho(\Sigma')$ è generato da $H_{q_0}(\rho), \dots, H_{q_k}(\rho)$ e che, necessariamente $k < n$.

Siccome vogliamo trattare un po' diffusamente il caso involutivo sarà opportuno fare l'osservazione seguente.

Poiché $i^*(\Sigma'|_Y) \neq \emptyset$, preso un punto $\rho_0 = (t=0, y_0, \tau = 0, \eta_0) \in \Sigma'$ un sistema di equazioni indipendenti per Σ' vicino a ρ_0 si otterrà prendendo $q_0 = \tau$ e $q_j = q_j(t,y,\eta)$, per $j = 1,\dots,k$. L'ipotesi 1.' dice che

$$\frac{\partial}{\partial t} q_j(t,y,\eta) = \{\tau, q_j\} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji}(t,y,\eta)\, q_i(t,y,\eta), \quad j = 1,\dots,k, \tag{2.19}$$

per una certa matrice k x k.

Segue da (2.19) che avremo:

$$\begin{pmatrix} q_1(t,y,\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_k(t,y,\eta) \end{pmatrix} = C(t,y,\eta) \begin{pmatrix} q_1(o,y,\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_k(o,y,\eta) \end{pmatrix}$$

per una certa matrice k x k, invertibile, $C(t,y,\eta)$.

Ne consegue che $i^*(\Sigma'|_Y) = \tilde{\Sigma} \subset T^*Y\setminus o$ è una sottovarietà involutiva regolare, di codimensione k di $T^*Y\setminus o$ e che

$$(2.21)\qquad \Sigma' = \{(t,y,\tau,\eta) \in T^*X \mid \tau = 0,\ (y,\eta)\in\tilde{\Sigma}\}.$$

Preso $i^*(\rho_0)$, è noto (Cfr. Duistermaat [2]) che si può trovare un intorno conico $\Gamma \subset T^*Y\setminus o$ di $i^*(\rho_0)$, un intorno conico $\Gamma' \subset T^*R^n_z\setminus o = T^*R^k_{z'} \times T^*R^{n-k}_{z''}\setminus o$ di $\sigma_0 = (z = 0,\ \zeta_0)$, $\zeta_0 = (\zeta_0'=o,\ \zeta_0''= (0,\dots,0,1))$, ed una trasformazione canonica omogenea Φ: $\Gamma \to \Gamma'$ tale che: $\Phi(i^*(\rho_0)) = \sigma_0$ e $\Phi(\Gamma\cap\tilde{\Sigma}) = \{(z,\zeta)\in\Gamma' \mid \zeta' = (\zeta_1,\dots,\zeta_k) = 0\}$.

Per noti risultati (Cfr. Hormander [3]) possiamo trovare due operatori integrali di Fourier $E \in I^\circ(R^n_z, Y; \Lambda')$, $E' \in I^\circ(Y, R^n_z; (\Lambda^{-1})')$ (dove Λ è un intorno conico chiuso di $(\sigma_0, i^*(\rho_0))$ nel grafico di Φ e Λ^{-1} è la relazione inversa) tali che $E\,E' - id_{R^n}$ (risp. $E'E - id_Y$) è smoothing in un intorno conico di (σ_0,σ_0) (risp. di $(i^*(\rho_0), i^*(\rho_0))$). Posto allora $\tilde{P} = (E \otimes I_t)\, P(E'\otimes I_t)$, si trova:

$$(2.22)\qquad \tilde{P}(t,z,D_t,D_z) = D_t^2 - \tilde{A}(t,z,D_z)$$

con $\tilde{A} \in OPS^2_{cl}(R^n_z)$, dipendente in modo C^∞ da t. Per il simbolo principale $\tilde{a}$ di $\tilde{A}$ si ha:

$$(2.23)\qquad \tilde{a}(t,z,\zeta) = a(t,\Phi^{-1}(z,\zeta)),$$

almeno su un intorno di σ_0.

Per l'ipotesi fatta su Hess $p(\rho_0)$, ne segue che, utilizzando la formula di Taylor potremo scrivere:

$$(2.24)\qquad \tilde{a}(t,z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{k} \tilde{a}_{ij}(t,z,\zeta)\zeta_i\zeta_j,$$

per una certa matrice $(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ a termini in $S^{o}_{cl}(R^{n}_{z})$ con $(\tilde{a}_{ij}(o,z_{o},\zeta_{o})) > 0$.

Il discorso precedente ci dice che se siamo interessati allo studio delle singolarità microlocali di soluzioni del P.d.C. (2.3) (anche non omogeneo) possiamo supporre, tornando alle vecchie notazioni, che P sia del tipo:

$$(2.25) \qquad P = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}(t,y,D_y)\, D_{y_i}\, D_{y_j} + A_1(t,y,D_y),$$

dove $A_{ij} \in OPS^{o}_{cl}(Y)$ e $A_1 \in OPS^{1}_{cl}(Y)$, dipendenti in modo C^{∞} da t, e la matrice (simmetrica) $(a_{ij}(t,y,\eta))$ dei simboli principali degli A_{ij} è definita positiva su $]-T,T[\times T^*Y\setminus o$.

Ciò che abbiamo provato è che ogni operatore iperbolico soddisfacente H_2 con Σ' involutiva regolare è microlocalmente (vicino a punti di $\Sigma'|_Y$) equivalente ad uno o.p.d. del tipo (2.25). Si noti che per (2.25) si ha:

$$(2.26) \qquad \begin{aligned} \Sigma' &= \{(t,y,\tau,\eta=(\eta',\eta''))\,|\ \tau = 0, \eta' = (\eta_1,\dots,\eta_k) = 0,\ \eta'' \neq o\} \\ \Sigma &= \{(t,y,\tau,\eta) \in T^*X\,|\,\eta\neq o,\ \tau = \pm\sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(t,y,\eta)\eta_i\,\eta_j}\}. \end{aligned}$$

E' importante notare che se k = 1 (e solo in tal caso) il polinomio $\tau \to p(t,\tau,y,\eta)$ è fattorizzabile nella forma $(\tau-\lambda_1(t,y,\eta))(\tau-\lambda_2(t,y,\eta))$ con radici $\lambda_j \in C^{\infty}$ reali, j = 1,2. E' questo il caso di caratteristiche doppie regolari, studiato, tra gli altri, da Melrose-Uhlmann [17] e da Nosmas [19] (quest'ultimo tratta anche casi, sempre involutivi, con caratteristiche regolari di molteplicità ≥ 2).

Vogliamo ora enunciare un risultato di propagazione dovuto a

Melrose-Uhlmann [18] (Cfr. anche R. Lascar [12]).

Per motivare un po' le astruserie che faremo si consideri l'esempio molto (molto) particolare in cui $P = \partial_t^2 - \Delta_{y'}$ è l'operatore delle onde in $R_t \times R^k_{y'}$, pensato però come operatore in $R_t \times R^n_y$. La soluzione del problema di Cauchy $Pu(t;y',y") = 0$, $u(o,y',y") = 0$, $(\partial_t u)(o,y',y") = f(y',y")$ è data da $u = (E(t,y') \otimes I_{y"})f$, dove $E(t,y')$è l'operatore che risolve lo stesso problema di Cauchy in $R_t \times R^k_{y'}$. Le singolarità (C^∞, analitiche o Gevrey) sono facilmente calcolabili. Si ha:

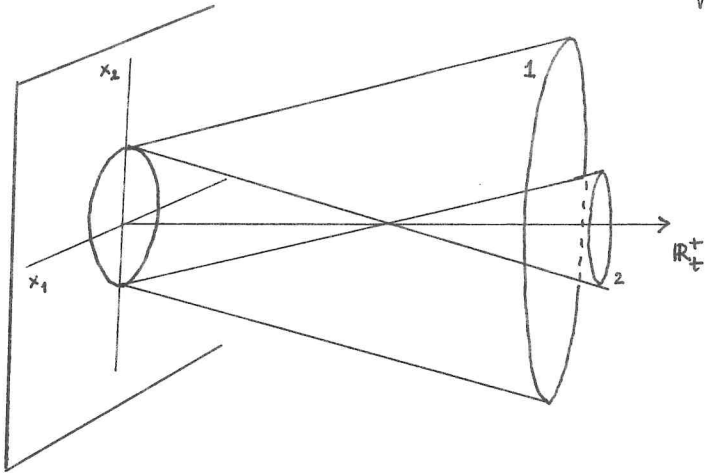
$$WF'(E \otimes I_{y"}) \subset \{((t,y',y",\tau,\eta',\eta"),(z',y",\zeta',\eta")) \in$$

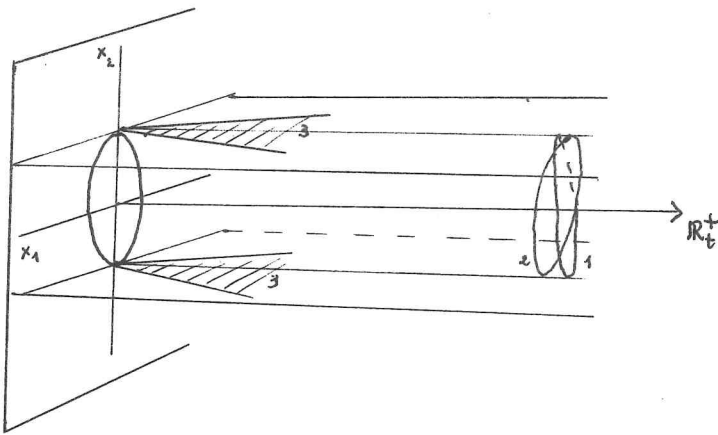
$$T^*(R_t x R^n) x\, T^*(R^n) \,|\, ((t,y',\tau,\eta'),(z',\zeta')) \in WF'(E)\} \cup$$

$$\cup \{((t,y',y";o,o,\eta"),(z',y";o,\eta")) \in T^*(R_t x\, R^n) x T^*(R^n) \,|$$

$$(t,y',z') \in \text{supp } E (\text{i.e. } |t| \geq |y'-z'|) \text{ e } (y",\eta") \in T^*(R^n)\setminus o\} = I \cup F.$$

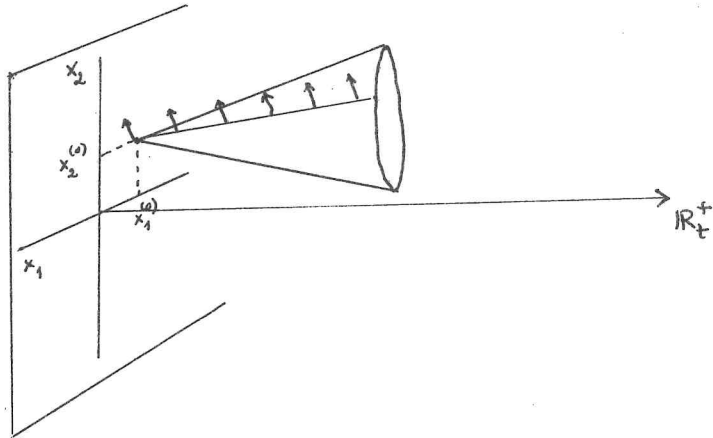
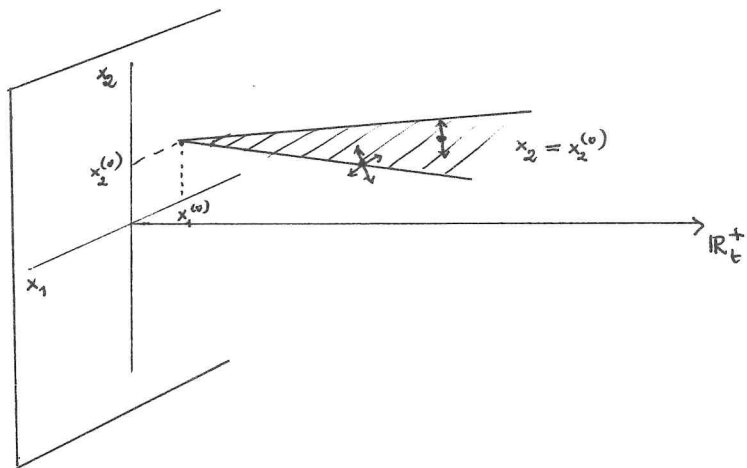
Si osservi che mentre I è contenuto in $(\Sigma\setminus\Sigma') \times T^*R^n$ (giacché $((t,y',\tau,\eta'),(z',\zeta')) \in WF'(E)$ significa $\zeta' = \eta' \neq o$, $y' = z' \pm t\,\eta'/|\eta'|$) è dà ragione della propagazione fuori di Σ', il secondo termine F dice che in ogni piano $y"$ fissato ha luogo propagazione nelle variabili (t,y') lungo il cono d'onda uscente da z'. Si è così in presenza del fenomeno di *rifrazione conica* (Cfr. Ludwig [15] per un'analisi fisica del fenomeno).

Per visualizzare cosa accade, nelle figure successive è mostrata l'evoluzione di una linea di discontinuità (una circonferenza) nel caso $n = 2$ e nei due casi $P = \partial_t^2 - (\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2})$ (iperbolico stretto) e $P = \partial^2_t - \partial^2_{x_1}$ (doppio)

$P = \partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$

singolarità iniziale su $x_1 + x_2^2 = \text{cost} > 0$

$P = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2$, in $R_t \times R^2$

singolarità iniziale su $x_1^2 + x_2^2 = \text{cost.}$

Il cono 3 è il caso di rifrazione originato dai punti in cui la normale al cerchio ha componente $\eta_1 = 0$.

Ecco invece qual'è l'evoluzione di una $\delta(x_1-x_1^{(o)}, x_2-x_2^{(o)})$.

$P = \partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$
singolarità iniziale in $\delta(x_1-x_1^{(o)}, x_2-x_2^{(o)})$

$P = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2$, in $R_t \times R^2$.
singolarità iniziale in $\delta(x_1-x_1^{(o)}, x_2-x_2^{(o)})$

Vediamo ora di enunciare il risultato di propagazione.

Giacché Σ' è involutiva, si può applicare il teorema di Frobenius e dedurre che per ogni $\rho \in \Sigma'$ passa una foglia massimale F_ρ che è una sottovarietà immersa di dimensione k e tale che $T_{\rho'}(F_\rho) = T_{\rho'}(\Sigma')^{\perp}$, $\forall \rho' \in F_\rho$. Ora osserviamo che se $F \subset \Sigma'$ è una foglia, c'è un'identificazione canonica tra $T^*_\rho(F)$ e $N_\rho(\Sigma') = T_\rho(T^*X)/T_\rho(\Sigma')$, ponendo

$$\begin{cases} j_\rho : N_\rho(\Sigma') \longrightarrow T^*_\rho(F) \\ j_\rho(\pi(v)) = v \rfloor \omega_{\rho | T_\rho(F)} \quad , \quad v \in T_\rho(T^*X), \end{cases}$$

dove $(v \rfloor \omega_\rho)(v') \overset{def}{=} \omega_\rho(v,v')$; si vede subito che $v \rfloor \omega_\rho$ ristretta a $T_\rho(F)$ dipende solo da $\pi(v) \in N_\rho(\Sigma')$ e che j_ρ è iniettiva (e dunque biiettiva). Poiché già sappiamo che Hess $p(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$, definisce una forma simmetrica su $N_\rho(\Sigma')$, potremo definire la forma quadratica:

$$\begin{cases} q_F : T^*F \longrightarrow R \\ q_F(\rho,\zeta) = \langle \text{Hess } p(\rho)\, j_\rho^{-1}(\zeta), j_\rho^{-1}(\zeta) \rangle, \end{cases}$$

per ogni $(\rho,\xi) \in T^*_\rho F$, $F \subset \Sigma'$ essendo una qualunque foglia del fogliettamento di Σ'.

L'ipotesi H_2 ci dice che la forma quadratica q_F è Lorentziana, cioè non degenere e con indice d'inerzia positivo uguale ad 1. Con P come in (2.25) e tenuto conto di (2.26); se $\rho_0 = (o, y_0, \tau = 0, \eta'=0, \eta''_0)$, la foglia per ρ_0 è data da $F_{\rho_0} = \{(t,y',y''_0,o,o,\eta''_0) | t,y'\}$, sicché $T^*(F_{\rho_0}) = \{(t,y',y''_0; \tau,\eta',\eta''_0) | t,y',\tau,\eta'\}$. Dunque:

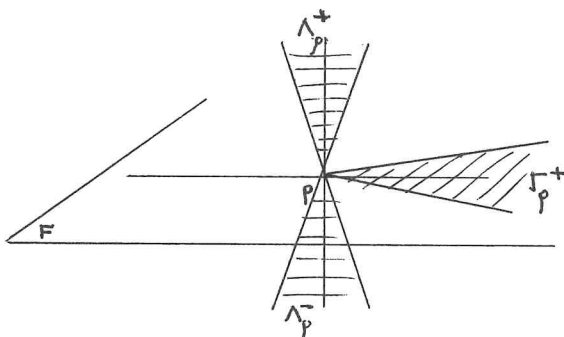
$$q_F((t,y',y''_o,o,o,\eta''_o),(\tau,\eta')) = \tag{2.29}$$
$$= \tau^2 - \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(t,y',y''_o,o,o,\eta''_o)\, \eta_i\, \eta_j$$

Per $\rho \in \Sigma'$ useremo la notazione $\Lambda_\rho^\pm$ per indicare le due componenti di

$$\Lambda_\rho^+ \cup \Lambda_\rho^- = \{\zeta \in T^*_\rho(F) \,|\, q_F(\rho,\zeta) \geq 0\},$$

essendo F la foglia per ρ e definiremo:

$$\Gamma_\rho^\pm = \{\pi_F(\exp s H_{q_F}(\rho,\zeta)) \,|\, s \geq o,\ \zeta \in \Lambda_\rho^\pm\}, \tag{2.30}$$

dove π_F è la proiezione sulla foglia F; Γ_ρ^+(risp. Γ_ρ^-) si chiama il *cono d'onda nel futuro* (risp. *nel passato*) definito da q_F

Usando le (2.29), $\Gamma_{\rho_o}^+$, $\rho_o = (t = o, y'_o, y''_o, o, o, \eta''_o)$, si trova integrando le equazioni:

$$
(2.31)\quad \begin{cases}
\dot{t}(s) = 2\tau(s) \quad , \quad t(o) = o \\
\dot{y}'(s) = -\nabla_{\eta'}\left(\sum_{i,j}^{k} a_{ij}(t,y',y''_o,o,o,\eta''_o)\eta_i\eta_j\right) \ , \ y'(o) = y'_o. \\
\dot{\tau}(s) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j}^{k} a_{ij}(t,y',y''_o,o,o,\eta''_o)\eta_i\,\eta_j\right), \ \tau(o) = \tau_o. \\
\dot{\eta}'(s) = \nabla_{y'}\left(\sum_{i,j}^{k} a_{ij}(t,y',y''_o,o,o,\eta''_o)\eta_i\,\eta_j\right), \ \eta'(o) = \eta'_o.
\end{cases}
$$

con $\tau_o \geq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(o,y'_o,y''_o;o,o,\eta''_o)\eta_i^{(o)}\,\eta_j^{(o)}}$ (analogo per $\Gamma^-_{\rho_o}$).

Siamo ora in grado di definire le relazioni fondamentali.

$$
(2.32)\quad \begin{cases}
C^{\pm} = \{(\rho',\rho'') \in (\Sigma\setminus\Sigma') \times T^*Y\setminus o \mid \exists\,\rho\in\Sigma,\ i^*(\rho) = \rho'' \notin \tilde{\Sigma}, \\
\qquad \exists\, s, \pm s \geq o, \ \rho' = \exp(s\,H_p)(\rho)\}. \\
C = C^+ \cup C^-. \\
C_1^{\pm} = \{(\rho',\rho'') \in \Sigma' \times \tilde{\Sigma} \mid \rho'' = i^*(\rho),\ \rho\in\Sigma',\ \rho'\in F_\rho \text{ e } \rho'\in\Gamma^{\pm}_{\rho}\} \\
C_1^+ \cup C_1^- = C_1 .
\end{cases}
$$

Si noti che $C^{\pm}$ coincidono con le relazioni (2.6) fuori di Σ' , mentre $C_1^{\pm}$ sono relazioni su $\Sigma' \times \tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma} = i^*(\Sigma'|_Y)$. Vale allora il teorema

<u>Teorema 4</u> (Melrose-Uhlmann [18]). Nell'ipotesi H_2, con Σ' involutiva regolare, e supposto che $p'|_{\Sigma'} = o$, se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del P.d.C. (2.3) si ha:

(2.33) $WF(u) \subset (C \cup C_1) \circ (WF(g_0) \cup WF(g_1))$,

dove $WF(\cdot)$ indica il fronte d'onda C^∞.

Osservazione. L'ipotesi $p'|_{\Sigma'} = 0$ è necessaria (Teorema 2) e sufficiente (Teorema 3) affinché il P.d C. (23) sia ben posto in C^∞ (si noti che $F(\rho)$ è nilpotente). Melrose e Uhlmann ottengono il Teorema 3 costruendo parametrici microlocali per il P.d C. E' interessante osservare che la dimostrazione in [18] si basa su una variante del metodo dell'ottica geometrica.

Ci si può ora domandare cosa succede se la condizione di Levi $p'|_{\Sigma'} = 0$ non è soddisfatta (e quindi il problema di Cauchy non è ben posto in C^∞).

Ricordiamo a questo proposito che alcuni casi con $p'|_{\Sigma'} \not\equiv 0$ sono stati trattati da R. Lascar [12] e da Mendoza-Uhlmann[4]', [5]'(questi ultimi nel caso codim $\Sigma' = 2$). In particolare, in [12] sembra che il $WF(u)$ sia sostanzialmente diverso nei casi $p'|_{\Sigma'} > 0$ e $p'|_{\Sigma'} < 0$, mentre in[5]' viene trattato il caso $\operatorname{Im} p'|_{\Sigma'} \neq 0$. In sostanza i risultati di propagazione in C^∞ quando $p'|_{\Sigma'} \neq 0$ sono diversi da quanto espresso dal Teorema 4.

Quando si possa dal quadro C^∞ al quadro analitico o Gevrey la situazione cambia in modo radicale.

Vale il teorema:

Teorema 5 (Ivrii [9],Trepreau [23], Bronštein [3]'): se P soddisfa H_1 (+) allora il P.d C. (2.3) (anche non omogeneo) è ben posto in $G^\sigma(X)$, $1 \leq \sigma < 2$. Il P.d.C. è univocalmente (in $\mathcal{D}'$) localmente risolubile anche in $G^2(X)$.

(+) Con coefficienti analitici.

Esaminando ora il Problema 2), cominciamo col considerare il caso Gevrey. Qui i risultati più generali sembrano come quelli di Wakabayashi [24]. Per enunciare il risultato fondamentale di [24] premettiamo alcune definizioni. Sia P soddisfacente H_1 e poniamo $\theta = (\tau=1, \eta=0)$. Supponiamo, per semplicità, che P abbia coefficienti analitici in X.

Per ogni $\rho = (t,y,\tau,\eta) \in T^*X\setminus o$, $\eta \neq o$, e per ogni $v \in T_\rho(T^*X)$ sia $p_\rho(v)$ la localizzazione di p in ρ, i.e.

(2.34) $\quad p(\rho + \varepsilon v) = \varepsilon^\mu (p_\rho(v) + o(1)), \ \varepsilon \to o,$

con $\mu \leq 2$.

E' noto (Cfr. Hormander [5]) che $p_\rho(\cdot)$ è (omogeneo e) iperbolico in $R^{2(n+1)}$ rispetto a $(0,\theta)$ e quindi poniamo:

(2.35) $\quad \Gamma(p_\rho,(o,\theta))$ = componente di (o,θ) in

$\{v \in T_\rho(T^*X) | p_\rho(v) \neq 0\}$

(2.36) $\quad \Gamma_\rho = \{v' \in T_\rho(T^*X) | \omega_\rho(v',v) \leq 0, \forall \ v \in \Gamma(p_\rho,(o,\theta))\}$

(2.37) $\quad \Lambda_\rho^\pm = \{\gamma(t) \in T^*X | t \to \gamma(t)$ è Lipschitziana con

$\frac{d}{dt}\gamma(t) \in \Gamma_{\gamma(t)}$, q.d. in t, $\gamma(o) = \rho$, $\pm t \geq o\}$.

Vale allora il:

<u>Teorema 6</u> (Wakabayashi [24]). Sia P a coefficienti analitici soddisfacenti H_1. Se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del P.d C. (2.3) si ha:

$$(2.38)\quad \begin{aligned} &WF_{\sigma}(u) \subset \{\rho \in T^*X\setminus o \mid \exists \rho' \in T^*X\setminus o, \\ &i^*(\rho') \in (WF_{\sigma}(g_0) \quad WF_{\sigma}(g_1)) \ , \ \rho \in \Lambda^{+}_{\rho'} \cup \Lambda^{-}_{\rho'}\}. \end{aligned}$$

Dove $WF_{\sigma}(\cdot)$ è il fronte d'onda Gevrey con $1 < \sigma < 2$.

E' da notare la generalità del Teorema 6 (in [24] è in realtà enunciato un teorema più generale per caratteristiche di molteplicità $r \geqq 2$, e allora $\sigma \in]1, r/r-1[$).

Per fare un confronto con il Teorema 4, osserviamo che se P ha caratteristiche doppie involutive e se $\rho \in \Sigma'$ allora:

$$(2.38)\qquad p_{\rho}(v) = \frac{1}{2} < \mathrm{Hess}\ p(\rho)\ v,v > \quad , \quad v \in T_{\rho}(T^*X).$$

Dunque $p_{\rho}(v) = 0$ se $v \in T_{\rho}(\Sigma')$ mentre su $N_{\rho}(\Sigma') = T_{\rho}(T^*X)/T_{\rho}(\Sigma')$, p_{ρ} è una forma quadratica non degenere di indice d'inerzia positivo uguale a 1.

Quando P ha la forma (2.25) si ha, se $\rho = (0, y'_0, y''_0, \tau = 0, \eta' = o, \eta''_0)$,

$$\Gamma(p_{\rho},(o,\theta)) = \{(\delta t, \delta y', \delta y'', \delta\tau, \delta\eta', \delta\eta'') \in T_{\rho}(T^*X) \mid \\ \delta\tau > \sqrt{\sum_{1}^{k}{}_{i,j}\ a_{ij}(o,y'_0,y''_0,o,\eta''_0)\delta\eta_i\ \delta\eta_j}\}$$

e quindi $v' = (\delta t', (\delta y')', (\delta y'')', \delta\tau', (\delta\eta')', (\delta\eta'')') \in \Gamma_{\rho}$ si ha:

$$\omega_{\rho}(v',v) = \delta\tau'\delta t + <(\delta\eta')', \delta y'> + <(\delta\eta'')', \delta y''> - \delta\tau\delta t' - <\delta\eta', (\delta y')'> \\ - <\delta\eta'', (\delta y'')'> \leqq o, \quad \text{per } v \in \Gamma(p_{\rho}(o,\theta))$$

E' allora facile vedere che $\Gamma_\rho = \{(\overline{\delta t}, \overline{\delta y'}, \overline{\delta y''}, \overline{\delta\tau}, \overline{\delta\eta'}, \overline{\delta\eta''}) |$
$\overline{\delta y''} = o, \overline{\delta\tau} = 0, \overline{\delta\eta'} = 0, \overline{\delta\eta''} = 0$ e $(\overline{\delta t}, \overline{\delta y'}) \in \Gamma(p_\rho,(o,\theta))^o\}$
Se ne deduce che $\Lambda_\rho^\pm = \{(\rho',\rho'') \in C_1^\pm | \rho'' = \rho\}$ e quindi il Teorema 4 vale anche per il $WF_\sigma(\cdot)$, $1 < \sigma < 2$, senza la condizione di Levi.

Problema. Cosa succede se $\sigma \geq 2$? Qual'è l'indice critico Gevrey che separa i risultati in C^∞ da quelli per $\sigma < 2$?

Quanto al caso analitico osserviamo che Laubin [14] ha provato un risultato dello stesso tipo del Teorema 4 per il $WF_{(1)}(\cdot)$, senza condizione di Levi su P. La dimostrazione di Laubin utilizza il noto teorema di Koshiwara-Kawai [6] sugli operatori microiperbolici (Cfr. anche Sjostrand [7]' per teoremi generali di propagazione nel caso analitico).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. CHAZARAIN: Opèrateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Institut Fourier, 24 (1974), 173-202.

[2] J.J. DUISTERMAAT: Fourier integral operators. Courant Inst. Lect. Notes, N.Y., 1973.

[3] L. HÖRMANDER: Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.

[4] ―――――― : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, J. d'Anal. Math., 32 (1977), 118-196.

[5] ―――――― : The analysis of linear partial differential operators, Vol. 1, Springer (Berlin), 1983.

[6] M. KASHIWARA, R. KAWAI: Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 359-404.

[7] V. Ya IVRII: Wave front of solution of some hyperbolic equations and conical refraction, Soviet Math. Dokl., 17 (1976), 265-268.

[8] ――――――: Wave front of some hyperbolic pseudo-differential operators, Soviet Math. Dokl., t. 229 (2), 1976..

[9] ――――――: Condition for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. Zh., 17 (1976), 547-563.

[10] V. Ya IVRII: Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Tans. Moscow Math.Soc. 1 (1978), 1-65.

[11] V.Ya IVRII, V.M. PETKOV: Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations, Russian Math. Surveys, 5 (1974), 1-70.

[12] R. LASCAR: Propagation des singularités des solutions..., Springer Lecture Notes in Math., 856 (1981).

[13] B. LASCAR, R. LASCAR: Propagation des singularités....., J. D'Anal. Math., 41 (1982), 1-38.

[14] P. LAUBIN: Analyse microlocale des singularités analytiques, Bull. Soc. Belg., 2 (1983), 103-212.

[15] D. LUDWIG: Conical refraction in crystal optics and hydromagnetis, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 113-124.

[16] R.B. MELROSE: The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 371-391.

[17] R.B. MELROSE, G.A. UHLMANN: Lagrangian intersection and the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979), 483-519.

[18] ——————————: Microlocal structure of involutive conical refraction, Duke Math. J., 46 (1979), 571-582.

[19] J.C. NOSMAS: Parametrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques..., Comm. P.D.E., 5 (1986), 1-22.

[20] O.A. OLEINIK: On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 569-586.

[21] K. TANIGUCHI: Fourier integral operators in Gevrey class on R^n..., Publ. R.I.M.S., Kyoto, 20 (1984), 491-542.

[22] M. TAYLOR: Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1981.

[23] J.M.TREPREAU: Le problème de Cauchy hyperbolique dans les classes d'ultrafonctions et d'ultradistributions., Comm. P.D.E., 4 (1979), 339-387.

[24] S. WAKABAYASHI: Singularities of solutions of the hyperbolic Cauchy problem in Gevrey classes, Proc. Japan Acad. Sc., 59 (1983), 182-185.

Aggiunte:

[1]' S. ALINHAC: Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable. Astérisque 34-37 (1976), 3-26.

[2]' ————: Solution explicite du problème de Cauchy pour des opérateurs effectivement hyperboliques, Duke Math. J. 45 (1978), 225-258.

[3]' M.D. BRONŠTEIN: The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Trans. Moscow Math. Soc., 1 (1982), 87-103.

[4]' G.A. MENDOZA, G.A. UHLMANN: A necessary condition for local solvability for a class of operators with double characteristics, J. of Funct. ANal., 52 (1983), 252-256.

[5]' ——————————: A sufficient condition for local solvability for a class of operators with double characteristics, Am. J. of Math., 106 (1984), 187-217.

[6]' T. MIWA: Propagation of microanaliticity for solutions of pseudodifferential equations, I. Publ. R.I.M.S., Hyoto, 10 (1975), 521-533.

[7]' J. SJÖSTRAND: Singularités analytiques microlocales, Prepubl. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1982.